Academia de Ciencias Matemáticas,

Físico-Químicas y Naturales de Granada

# ESTIMACIÓN MÍNIMO CUADRÁTICA EN MODELOS CON FALLOS ALEATORIOS

DISCURSO PARA EL ACTO DE SU RECEPCIÓN

COMO ACADÉMICA NUMERARIA POR LA

**ILMA. SRA. DÑA. JOSEFA LINARES PÉREZ**

GRANADA, 2013

Academia de Ciencias Matemáticas,

Físico-Químicas y Naturales de Granada

**ESTIMACIÓN MÍNIMO CUADRÁTICA**
**EN MODELOS CON FALLOS ALEATORIOS**

DISCURSO PARA EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
COMO ACADÉMICA NUMERARIA POR LA

**ILMA. SRA. DÑA. JOSEFA LINARES PÉREZ**

GRANADA, 2013

# Estimación mínimo cuadrática en modelos con fallos aleatorios

**Josefa Linares Pérez**

Rector Magnífico,

Excmo. Sr. Presidente,

Excmos. e Ilmos. Sres. Académicos,

Señoras y Señores:

Mis primeras palabras, al comienzo de este acto de ingreso en la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada, han de ser de sincera y profunda gratitud a los miembros de esta Academia por aceptar, a propuesta de la Sección de Matemáticas, mi ingreso entre sus miembros. Esto supone para mí una gran satisfacción y, sobre todo, un inmenso honor, que deseo agradecer públicamente.

Asimismo, y como muestra de reconocimiento a la confianza con que los miembros de esta Academia me han distinguido, deseo expresar mi disponibilidad para trabajar y colaborar con toda mi ilusión en cuantas tareas la

Academia estime que pueda ser de utilidad para la consecución de sus objetivos. Les aseguro que no me faltará entusiasmo, ni ahorraré esfuerzos ni dedicación.

Deseo reconocer y agradecer de manera muy especial al profesor Ramón Gutiérrez Jáimez, Presidente de la Sección de Matemáticas, su constante apoyo en toda mi carrera universitaria. Él ha sido mi maestro desde el inicio de la misma, cuando, bajo su dirección, obtuve una beca de investigación que culminó en la defensa de la tesis doctoral. Puedo afirmar que su indiscutible calidad profesional, así como su gran calidad humana, han marcado las sucesivas etapas y logros de mi vida universitaria, entre los cuales el ingreso en esta Academia es uno de los más importantes.

Es también, no sólo tradicional sino de rigor, dedicar unas palabras al que va a ser mi padrino de ingreso en este solemne acto de toma de posesión, el profesor Andrés González Carmona, Vicepresidente de la Académia. Quiero agradecer públicamente la aceptación, por su parte, del encargo de la Academia de realizar el discurso de contestación, y manifestar la satisfacción que ello me produce ya que para mí Andrés González Carmona no sólo es un excelente compañero sino que, sobre todo, es un gran amigo.

El discurso de ingreso que voy a tener el honor de presentar versa sobre el desarrollo del problema de estimación en sistemas estocásticos lineales discretos. Mi propósito con esta elección es realizar un resumen de algunos de los aspectos del trabajo que, desde distintos ángulos, ha desarrollado en los últimos años el grupo de investigación que dirijo. Puesto que tengo el con-

vencimiento de que una parte de lo que uno es y alcanza pertenece a todos aquellos que han contribuído a su consecución, deseo expresar mi más sincera gratitud a todos los integrantes del grupo por su colaboración; en especial a mi amiga y compañera, la profesora Aurora Hermoso Carazo, por su continuo estímulo y desinteresado apoyo en todas las facetas de mi trayectoria universitaria.

# 1 Estimación de mínimos cuadrados en sistemas discretos

## 1.1 El origen del método de mínimos cuadrados

Desde tiempos remotos, la interpretación de las observaciones y la posibilidad de realizar predicciones sobre fenómenos reales ha suscitado un especial interés en la comunidad científica. En su texto *The Exact Sciences in Antiquity* (1952), el matemático y astrónomo O. Neugebauer indica que ya en tiempos de los babilonios se utilizó una forma elemental de series de Fourier con objeto de predecir ciertos fenómenos celestes. Ahora bien, los inicios de una teoría de estimación como tal, en la que se reconoce la importancia de los errores de las observaciones y se estudia la forma de minimizar diferentes funciones de error, datan de 1632 y pueden atribuirse a Galileo Galilei (1564-1642), nombre estrechamente relacionado, en este y otros muchos aspectos, con la revolución científica del Renacimiento.

Sin embargo, los primeros estímulos para el desarrollo formal de la Teoría de Estimación no se dieron hasta finales del siglo XVIII y fueron motivados por estudios astronómicos en los cuales, utilizando datos de medidas de telescopios, se analizó el movimiento de cuerpos celestes, planteándose el problema de estimación de los parámetros que caracterizan dicho movimiento. En 1795, con solo 18 años, K. F. Gauss (1777-1855) utilizó por primera vez el método de mínimos cuadrados para dar solución a este problema.

Posteriormente, de manera más concreta, el día de Año Nuevo de 1801, el astrónomo italiano G. Piazzi (1746-1826) descubrió el asteroide Ceres desde un observatorio de Palermo, antes de que su desplazamiento produjera la ocultación definitiva pocas semanas más tarde. Aunque fueron muchos los científicos que intentaron estimar la trayectoria de Ceres en el transcurso de ese año, la mayoría de las evaluaciones fueron inútiles; el único procedimiento lo suficientemente preciso para permitir al astrónomo alemán F. Zach (1754-1832) reencontrar a Ceres al final del año fue el método de mínimos cuadrados de Gauss.

La descripción detallada del uso del método de mínimos cuadrados propuesto por Gauss para la estimación de los seis coeficientes que determinaron de forma exacta la órbita elíptica del asteroide Ceres no fue publicada hasta 1809, en el segundo volumen de su obra sobre mecánica celeste, *Theoria Motus Corporum Coelestium*.

De forma independiente, el método de mínimos cuadrados había sido publicado en 1806 por el francés A. M. Legendre (1752-1833) en su libro *Nouvelles méthodes pour la determination des orbites des comètes*, lo que suscitó gran controversia durante el siglo XIX respecto al verdadero autor del método; a pesar de ello, los historiadores han encontrado suficiente evidencia para dar prioridad a Gauss como inventor del mismo.

Aunque la aplicación empírica del método de mínimos cuadrados había sido propuesta y realizada por Gauss y Legendre, fue P. S. Laplace (1749-1827) quien, en 1812, en su *Théorie analytique des probabilités*, presentó la demostración formal del mismo. Posteriormente, en 1821, Gauss desarrolló una variante recursiva que permitía corregir un estimador previo tras una nueva observación, sin necesidad de repetir los cálculos; más tarde, en 1826, presentó una primera versión del famoso resultado conocido con el nombre de *Teorema de Gauss-Markov* que afirma que el estimador de mínimos cuadrados es el de menor varianza en la clase de estimadores lineales e insesgados.

La introducción del método de mínimos cuadrados supuso un importante avance científico y una vía innovadora de conexión entre las ciencias teóricas y las experimentales, proporcionando una técnica de estimación universalmente aceptada, que aún en la actualidad se usa frecuentemente para la resolución de numerosos problemas prácticos.

## 1.2 Mínimos cuadrados y procesos estocásticos

Después de los trabajos pioneros de Gauss y Legendre, no surgen nuevos enfoques del problema de estimación durante aproximadamente un siglo, hasta que K. Pearson (1857-1936) propone, alrededor de 1895, el método de los momentos para la estimación de parámetros. Aunque prácticamente carente de justificación teórica, este método fue extensamente utilizado hasta que R. A. Fisher (1890-1962), en 1912, formula el método de máxima verosimilitud, una de las técnicas de estimación más ampliamente investigada y, aún en nuestros días, de mayor aplicación práctica.

A finales de los años treinta del siglo XX, la *Teoría de Probabilidad y Procesos Estocásticos* había avanzado lo suficiente como para permitir formular y abordar los problemas de estimación desde un nuevo punto de vista. Los primeros trabajos sobre la aplicación del método de mínimos cuadrados en el campo de los procesos estocásticos datan de la década de los cuarenta del siglo XX y se deben, fundamentalmente, a A. N. Kolmogorov (1903-1987), M. G. Krein (1907-1989) y N. Wiener (1894-1964). En 1939, Kolmogorov consideró procesos estacionarios en tiempo discreto y, motivado por algunos trabajos de H. Wold (1908-1992), proporcionó un tratamiento comprensivo del problema de predicción para tales procesos. Krein, en 1945, demostró que los resultados de Kolmogorov podían extenderse a procesos en tiempo continuo mediante el uso de una simple transformación bilineal.

Los objetivos y, consecuentemente, los resultados obtenidos por Wiener fueron independientes de los de Kolmogorov y Krein. Motivado por la falta en los trabajos anteriores de fórmulas específicas para la obtención del predictor óptimo, fórmulas obviamente necesarias en las aplicaciones, Wiener, en 1942, replanteó el problema de predicción lineal en tiempo continuo y proporcionó soluciones explícitas para su cálculo; dichos resultados no fueron publicados hasta 1949.

En su estudio, Wiener consideró observaciones escalares, intervalos de observación semiinfinitos y supuso que la señal a estimar y el ruido de las observaciones eran procesos conjuntamente estacionarios. Bajo estas hipótesis, basándose en las funciones de covarianzas de la señal y el ruido, y utilizando métodos variacionales, Wiener concluyó que la función impulso-respuesta del estimador de mínimos cuadrados era la solución de una ecuación que él mismo y E. Hopf habían resuelto previamente, en 1931, usando técnicas de factorización espectral, la denominada desde entonces *ecuación de Wiener-Hopf*.

En los años que siguieron a la publicación del trabajo de Wiener hubo diversos intentos de generalizar sus resultados para cubrir la estimación de procesos estacionarios a partir de intervalos de observación finitos, así como para estimar procesos no estacionarios. Aunque hubo algunas aportaciones importantes relacionadas con estas extensiones, la mayoría de las contribuciones no fueron más que pequeñas variaciones o estudio de casos particulares de los resultados existentes.

Además, como indica Kailath (1974), existen otras razones que hacen que los resultados teóricos obtenidos en este periodo no resultaran totalmente satisfactorios:

*i)* *Su aplicación práctica era bastante difícil, requiriendo a menudo determinar la solución de complicadas ecuaciones diferenciales y algebraicas auxiliares y el cálculo de raíces de polinomios.*

*ii)* *La actualización de los estimadores no era fácil cuando aumentaba el intervalo de observación.*

*iii)* *No podían adaptarse convenientemente al caso de señales u observa-*

*ciones vectoriales.*

Los dos últimos inconvenientes mencionados tuvieron una marcada relevancia en relación con los problemas de determinación de órbitas de satélites, ya que en ellos se presentan habitualmente observaciones vectoriales de algunas combinaciones de la posición y velocidad, además de disponer de un gran número de datos que aumenta secuencialmente, requiriendo una rápida actualización de los estimadores. Estos inconvenientes fueron determinantes para el avance de una investigación fuertemente motivada por su aplicación práctica a los problemas de estimación de estados dinámicos que aparecieron con la llegada de la era espacial.

## 1.3 Algoritmos de estimación en sistemas gaussianos

Después de algunas soluciones previas a los problemas anteriormente mencionados (entre las que cabe destacar las aportaciones de P. Swerling, en 1959, en relación con el problema de la recursividad), R. E. Kalman desarrolló en 1960 un algoritmo de estimación recursivo que parecía especialmente diseñado para abordar el problema de determinación de órbitas de satélites. Su aplicación a la estimación de trayectorias en el programa Apolo desarrollado en el Centro de Investigación Ames de la NASA contribuyó significativamente a una exitosa inserción en la órbita de la Luna.

A diferencia de la formulación convencional del problema de estimación propuesta por Wiener, basada en el conocimiento de la función de covarianzas de la señal a estimar y del ruido de la observación, Kalman considera que el proceso señal es la salida de un sistema dinámico lineal discreto generado por un ruido blanco, lo que se conoce como *modelo de espacio de estados.* El problema de estimación se plantea así sobre la base de dos ecuaciones con la estructura que se describe a continuación.

*Ecuación del estado*

Es una ecuación vectorial en diferencias, también denominada ecuación de transición, que describe la evolución de la señal en el tiempo:

$$x(k+1) = \Phi(k+1,k)x(k) + \Gamma(k+1,k)w(k), \qquad k \geq 0; \qquad x(0) = x_0,$$

donde $\{x(k);\ k \geq 0\}$ es el proceso estocástico $n$-dimensional que representa el *estado* del sistema. El ruido, $\{w(k);\ k \geq 0\}$, es un proceso estocástico $r$-dimensional; el vector $w(k)$ representa *la perturbación aleatoria del estado.* Las matrices determinísticas $\Phi(k+1,k)$ y $\Gamma(k+1,k)$ se denominan *matriz de transición del estado* y *matriz de transición* o *de ponderación de la perturbación aleatoria*, respectivamente.

*Ecuación de la observación*

Es una ecuación vectorial que describe la relación entre el estado que se desea estimar y la medida que en cada instante se dispone del mismo:

$$y(k) = H(k)x(k) + v(k), \qquad k \geq 0$$

donde $\{y(k);\ k \geq 0\}$ es el proceso estocástico $m$-dimensional que representa *las medidas* u *observaciones* del sistema. El ruido, $\{v(k);\ k \geq 0\}$, es un proceso estocástico $m$-dimensional; el vector $v(k)$ representa *la perturbación aleatoria de la observación.* La matriz determinística $H(k)$ se denomina *matriz de medidas* o *de observaciones.*

La formulación explícita de Kalman para la resolución del problema de estimación exige las hipótesis de gaussianidad e independencia mutua de los ruidos y el estado en el instante inicial. Concretamente, sobre los ruidos y el estado inicial se imponen las siguientes hipótesis:

- El estado inicial, $x_0$, es un vector aleatorio $n$-dimensional gaussiano con media cero y matriz de covarianzas $E[x_0x_0^T] = P_0$.

- El proceso $\{w(k);\ k \geq 0\}$ es una sucesión ruido blanco gaussiana, centrada, con matrices de covarianzas $E[w(k)w^T(k)] = Q(k),\ k \geq 0$.

- El proceso $\{v(k);\ k \geq 0\}$ es un proceso ruido blanco gaussiano, centrado y con covarianzas $E[v(k)v^T(k)] = R(k),\ k \geq 0$, siendo $R(k)$ una matriz definida positiva.

- El estado inicial, $x_0$, y los ruidos, $\{w(k);\ k \geq 0\}$ y $\{v(k);\ k \geq 0\}$, son mutuamente independientes.

Bajo estas condiciones, se obtiene un algoritmo recursivo, el conocido *filtro de Kalman*, consistente en un conjunto de ecuaciones en diferencias (ecuaciones diferenciales en el caso continuo, desarrollado posteriormente por Kalman y Bucy en 1961), incluyendo una ecuación de Riccati para la covarianza del error de estimación, que proporciona una medida de la bondad de la estimación.

*El filtro óptimo, $\widehat{x}(k/k)$, viene dado por la relación*

$$
\begin{aligned}
\widehat{x}(k/k) = {} & \Phi(k,k-1)\widehat{x}(k-1/k-1) \\
& + K(k)\left[y(k) - H(k)\Phi(k,k-1)\widehat{x}(k-1/k-1)\right], \quad k > 0, \\
\widehat{x}(0/0) = {} & K(0)y(0),
\end{aligned}
$$

*donde $K(k)$ es una matriz $n \times m$, denominada matriz de ganancia del filtro, que satisface*

$$K(k) = P(k/k-1)H^T(k)\left[H(k)P(k/k-1)H^T(k) + R(k)\right]^{-1}, \quad k \geq 0.$$

*Las matrices de covarianzas de los errores de filtrado, $P(k/k)$, y predicción, $P(k/k-1)$, verifican*

$$\begin{aligned}
&P(k/k) = [I - K(k)H(k)]\, P(k/k-1), \qquad k \geq 0,\\
&P(k/k-1) = \Phi(k,k-1)P(k-1/k-1)\Phi^T(k,k-1)\\
&\qquad\qquad +\Gamma(k,k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k,k-1), \qquad k > 0,\\
&P(0/-1) = P_0.
\end{aligned}$$

Este algoritmo determina la media a posteriori del estado en cada instante, dadas las observaciones hasta dicho instante; esto es, el filtro óptimo bajo pérdidas cuadráticas y, en general, bajo funciones de pérdida admisibles.

La consideración por Kalman de un modelo de estados para la señal vino a dar solución a los principales inconvenientes que planteaba la formulación original de Wiener para lograr una solución eficiente del problema de estimación; de hecho, el desarrollo del filtro de Kalman supuso una importante revolución en esta investigación, y numerosas aplicaciones, modificaciones y extensiones del mismo han contribuido a la existencia de una amplia literatura sobre el tema.

Una de las principales ventajas de la formulación (y consiguiente resolución del problema) de Kalman sobre la clásica de Wiener es la eficiencia computacional que conlleva el uso de algoritmos recursivos, que actualizan la nueva información sin necesidad de rehacer los cálculos desde el inicio. A finales de la década de los setenta del siglo XX comienzan a aparecer diversas contribuciones que retoman la formulación de Wiener para abordar el problema de estimación de señales con función de covarianzas factorizable (Nakamori y Sugisaka (1977, 1978)). A diferencia de la metodología usada por Wiener para la resolución de la ecuación de Wiener-Hopf, estos trabajos utilizan un argumento *invariant embedding*, que permite resolver esta ecuación en el dominio del tiempo, dando lugar a algoritmos de estimación recursivos que pueden aplicarse a señales tanto estacionarias como no estacionarias.

## 1.4 Algoritmos de estimación en sistemas no gaussianos

Tanto la formulación del filtro de Kalman, basado en el conocimiento del modelo de espacio de estados, como la de los de tipo Wiener, basados en información de covarianzas, exigen que la distribución conjunta de la señal y las observaciones sea gaussiana y, bajo esta condición, se obtienen algoritmos recursivos que proporcionan, como ya se ha indicado, el filtro óptimo bajo pérdidas cuadráticas y, en general, bajo cualquier función de pérdida admisible.

Aunque estos algoritmos han sido aplicados con gran éxito a numerosas situaciones prácticas, existe un considerable número de problemas reales en los que una descripción realista de la situación conlleva la no gaussianidad de la distribución conjunta de la señal a estimar y las observaciones disponibles; en tales casos, los mencionados algoritmos solo proporcionan el estimador de menor error cuadrático medio en la subclase de estimadores lineales.

En general, la determinación del estimador óptimo en sistemas no gaussianos requiere el uso de técnicas bayesianas, y conlleva una dificultad computacional que motiva la necesidad de buscar aproximaciones subóptimas que subsanen este inconveniente. Un camino natural para ello es restringir la clase de estimadores considerados y buscar el óptimo en la clase restringida.

Una de las soluciones más simple y eficiente desde el punto de vista computacional al problema de estimación en sistemas lineales no gaussianos es, sin duda, la estimación lineal, pero esta puede mejorarse significativamente considerando funciones polinómicas de las observaciones. En este sentido, cabe destacar los trabajos realizados en la década de los noventa del siglo XX por un equipo de investigadores de la Universidad de La Sapienza (Roma) sobre estimación cuadrática y polinomial de grado arbitrario en sistemas lineales con ruidos aditivos no gaussianos (De Santis et al. (1995), Carravetta et al. (1996)). La efectividad de los estimadores polinomiales frente a los lineales ha quedado suficientemente probada mediante su aplicación a diversos problemas de procesamiento de señales, como predicción, detección y control, así como a problemas de restauración de imágenes (Uppala y Shar (1997), Laakso et al. (2000) y Dalla Mora et al. (2001), entre otros).

# 2 Algoritmos de estimación para modelos con fallos aleatorios en las medidas

Tanto el algoritmo de filtrado de Kalman y sus extensiones como los algoritmos de tipo Wiener solo son aplicables a sistemas estándar, en los que la observación es una función lineal de la señal perturbada por un ruido aditivo.

Sin embargo, en muchas ocasiones, como, por ejemplo, cuando se utilizan redes de comunicación o redes de sensores, tanto los mecanismos de medidas como los de transmisión de las observaciones al procesador están sujetos a fallos eventuales que pueden provocar que las observaciones procesadas en la estimación no coincidan con las reales en cada instante. Los tipos de fallo más frecuentes son que las observaciones procesadas no contengan información sobre la señal y sean únicamente ruido, que se produzcan retrasos en la recepción de las medidas reales e, incluso, que las medidas en ciertos instantes de tiempo se pierdan definitivamente.

A la hora de abordar el problema de estimación, estos inconvenientes obligan a considerar una nueva modelización de las medidas, incluyendo parámetros aleatorios adicionales en la ecuación de observación, lo que hace inaplicables los algoritmos de estimación convencionales.

Los nuevos modelos de observación introducidos con objeto de describir fallos aleatorios en las medidas hacen que los sistemas asociados sean siempre no gaussianos y, como ya se ha indicado, la dificultad computacional que conlleva la determinación del estimador óptimo en tal situación obliga a que sea necesario acudir a la determinación de estimadores subóptimos fácilmente calculables mediante algoritmos recursivos.

Comentamos seguidamente algunos de los modelos de fallos aleatorios que han sido objeto de estudio en las últimas décadas, centrándonos fundamentalmente en los resultados propuestos para dar solución al problema de estimación en tales modelos.

## 2.1 Sistemas lineales con observaciones inciertas

El problema de estimación de señales aleatorias a partir de observaciones ruidosas ha sido ampliamente estudiado bajo la hipótesis de que, en cualquier instante de tiempo, la señal que se desea estimar está presente en las observaciones con probabilidad uno; es decir, la perturbación de las observaciones se debe únicamente a la presencia de ruidos aditivos. Sin embargo, como ya se ha indicado, existen situaciones reales en las que el mecanismo de medidas puede interrumpirse esporádicamente de forma aleatoria de modo que, en cada instante de tiempo, la observación puede no contener a la señal y consistir únicamente en ruido con una probabilidad positiva, denominada *probabilidad de falsa alarma*.

Los sistemas que modelizan estas situaciones se denominan *sistemas con observaciones inciertas* y, en ellos, la ecuación de observación no solo está afectada por un ruido aditivo, sino que incluye también una componente ruido multiplicativa, descrita por una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli, cuyos valores uno o cero indican, respectivamente, la presencia o ausencia de señal en la observación correspondiente. Específicamente, el modelo de observación está definido por:

$$y(k) = \gamma(k)H(k)x(k) + v(k), \quad k \geq 0,$$

donde $\{\gamma(k);\ k \geq 0\}$ es una sucesión de variables de Bernoulli con probabilidades $P[\gamma(k) = 1] = p(k)$, $\forall k \geq 0$. Por tanto, la probabilidad de falsa alarma, esto es, la probabilidad de que la observación $y(k)$ sea únicamente el ruido, $v(k)$, es $1 - p(k)$.

Debe indicarse que la inclusión en este modelo de las variables de Bernoulli para describir la incertidumbre, esto es, la componente aleatoria multiplicativa de la ecuación de observación, hace que la distribución conjunta de la señal y las observaciones no sea gaussiana y, por tanto, el estimador óptimo de mínimos cuadrados no es una función lineal de las observaciones.

Nahi (1969) planteó por vez primera el problema de estimación a partir de observaciones inciertas considerando, como Kalman, un modelo de estados para la señal. Concretamente, Nahi abordó el problema de filtrado lineal de menor error cuadrático medio, deduciendo un algoritmo recursivo, con estructura análoga a la del filtro de Kalman, para la determinación del filtro lineal óptimo, bajo los supuestos de que las variables de Bernoulli que describen la incertidumbre son independientes y los ruidos aditivos del sistema son blancos y mutuamente independientes.

Más tarde, Jaffer y Gupta (1971) abordaron el problema de estimación óptima en este tipo de sistemas, concluyendo que el cálculo del estimador óptimo requiere un crecimiento exponencial de memoria, lo que hace que su obtención no sea simple desde el punto de vista computacional. Este inconveniente motivó y sigue motivando el desarrollo de una amplia investigación en el problema de estimación a partir de observaciones inciertas, enfocada fundamentalmente a la obtención de soluciones subóptimas bajo diversas hipótesis sobre la señal y los procesos ruido que intervienen en el modelo.

El tratamiento de situaciones prácticas en las que la incertidumbre de las observaciones no puede representarse por variables aleatorias independientes fue abordado inicialmente por Jackson y Murthy (1976) y Hadidi y Schwartz (1979) quienes, considerando distintos modelos de dependencia para las variables de Bernoulli, establecieron también algoritmos recursivos para la obtención del filtro lineal de menor error cuadrático medio.

Otra extensión interesante del filtro de Nahi es la obtenida por Hermoso-Carazo y Linares-Pérez (1994), en la que se suprime la hipótesis de independencia de los ruidos aditivos de la ecuación de la señal y de la observación, ya que la misma en ocasiones puede ser irreal como, por ejemplo, en el caso de sistemas de control con retroalimentación, en los que la evolución de la señal puede estar influenciada por las observaciones en instantes anteriores.

Por otra parte, con objeto de mejorar las estimaciones proporcionadas por el algoritmo de filtrado lineal de Nahi, en Caballero-Águila et al. (2003), se abordó el problema de estimación polinomial de grado arbitrario; este estudio constituyó la base para la posterior generalización al caso en que la incertidumbre de las observaciones está descrita por variables de Bernoulli no independientes, considerando el modelo de dependencia desarrollado por

Hadidi y Schwartz (Carravetta y Mavelli (2004)).

En los últimos años, la investigación en sistemas con observaciones inciertas se ha centrado especialmente en el problema de estimación desde la perspectiva del filtrado de Wiener; esto es, cuando no se dispone de un modelo de espacio de estados, sino exclusivamente de las funciones de covarianzas de la señal y de los ruidos (aditivo y multiplicativo) de la ecuación de observación. Concretamente, la hipótesis básica es que la función de covarianzas de la señal a estimar es factorizable, hipótesis que se satisface tanto por señales estacionarias (como consideró inicialmente Wiener) como no estacionarias y, en particular, por señales que puedan representarse mediante un modelo de estados.

Los resultados bajo esta perspectiva cubren, por tanto, el campo de aplicación de los algoritmos basados en el conocimiento del modelo de espacio de estados, como el filtro de Nahi y extensiones del mismo. La principal ventaja de este tratamiento es que, manteniendo la propiedad de recursividad, característica esencial de los algoritmos obtenidos cuando se conoce la ecuación que representa la evolución de la señal, los algoritmos basados en covarianzas no requieren la identificación previa de dicho modelo.

Las primeras aportaciones en esta línea son una serie de algoritmos recursivos para la resolución del problema de estimación lineal considerando modelos de observación más generales que el de Nahi; por ejemplo, incluyendo ruidos aditivos no necesariamente blancos y no necesariamente independientes de la señal.

Respecto a la independencia de las variables de Bernoulli que modelizan la incertidumbre, aunque esta hipótesis es válida en muchas situaciones prácticas, no siempre es realista, y se precisan algoritmos de estimación específicos aplicables a tales situaciones. Las distintas estructuras de dependencia para dichas variables permiten cubrir, por ejemplo, sistemas con diferentes cadenas de transmisión con distintas probabilidades de incertidumbre, en los que la señal es transmitida aleatoriamente por una de ellas. Asimismo, se han podido considerar sistemas en los que el número máximo de observaciones consecutivas sin información sobre la señal está acotado, como ocurre, por ejemplo, en sistemas de transmisión con sensores *stand-by* programados para ser automáticamente reemplazados al detectar la anomalía.

La investigación, bajo dichas estructuras de dependencia de las variables que describen la incertidumbre, se inició con el problema de estimación lineal y, posteriormente, se obtuvieron también algoritmos recursivos de estimación polinomial de grado arbitrario que, como ocurre en los sistemas no afectados por incertidumbre, proporcionan una clara mejora frente a los estimadores lineales.

En todos los trabajos a los que se ha hecho referencia anteriormente, se supone que las observaciones disponibles para la estimación proceden de un único sensor o de varios con las mismas características de incertidumbre y, por tanto, un único ruido multiplicativo es utilizado para describir la presencia o ausencia de la señal en las observaciones de los distintos sensores. Sin embargo, hoy día, y con un desarrollo creciente, muchos sistemas reales disponen de redes de sensores, que pueden tener diferentes características de incertidumbre.

Considerando que el modelo de estados para la señal es conocido, el problema de estimación lineal mínimo cuadrática a partir de observaciones inciertas procedentes de múltiples sensores fue abordado inicialmente bajo el supuesto de que cada sensor puede fallar en cualquier instante de tiempo, independientemente de los otros sensores (Hounkpevi y Yaz (2007a)). Recientemente, este estudio ha sido generalizado en una doble dirección: por una parte, se ha supuesto que la incertidumbre en cada sensor está modelizada por variables correladas en instantes consecutivos y, por otra, no solo se han establecido algoritmos recursivos para el problema de estimación lineal, sino también algoritmos para la obtención de estimadores cuadráticos (Caballero-Águila et al. (2011)).

En lo que se refiere a la estimación basada en información de covarianzas y observaciones procedentes de múltiples sensores, los resultados alcanzados hasta este momento se concretan en un algoritmo de estimación lineal cuando la incertidumbre en cada sensor está descrita por variables de Bernoulli correladas en instantes consecutivos (Jiménez-López et al. (2008)).

## 2.2 Sistemas con retraso aleatorio en las observaciones

En numerosos sistemas reales puede ocurrir que, en el instante en que se va a realizar la estimación, las medidas de la señal no estén actualizadas. Existen diversas causas que pueden provocar retrasos en la recepción de las medidas como, por ejemplo, congestión en las redes de comunicación o inaccesibilidad de datos durante ciertos instantes de tiempo por cualquier tipo de fallo en el mecanismo de transmisión. En estas situaciones, la medida procesada para estimar la señal en un instante de tiempo puede no ser la medida real de la misma.

En algunas ocasiones, los errores debidos a los retrasos en la transmisión han sido tratados como errores en las mediciones e incluídos en los ruidos aditivos, y la estimación se ha abordado como en la situación convencional de medidas actualizadas. Sin embargo, bajo este tratamiento, los resultados obtenidos no han sido satisfactorios, dando lugar a representaciones inexactas de las verdaderas trayectorias de la señal.

Existen también situaciones en las que los retrasos se pueden interpretar como constantes predeterminadas o como funciones determinísticas conocidas del tiempo. No obstante, debido a la incertidumbre sobre las numerosas causas que pueden provocar los retrasos en situaciones prácticas generales, estas suposiciones no son siempre válidas y, usualmente, surge la necesidad de interpretar los retrasos como fenómenos aleatorios. Esta interpretación conlleva la necesidad de remodelizar las ecuaciones que describen las observaciones, lo que se realiza mediante la introducción de variables aleatorias adicionales en el modelo de observación.

Los primeros trabajos que contemplan la posibilidad de retraso aleatorio en las observaciones consideran que este no excede un periodo muestral, y esta situación se aborda comúnmente suponiendo que la observación procesada en cada instante es la última disponible; esto es, la observación real en dicho instante, si no ha habido retraso, o la observación del instante anterior si lo ha habido. Para describir este hecho, el retraso se modeliza mediante una sucesión de variables de Bernoulli; en cada instante de tiempo, el valor uno de la variable de Bernoulli indica que existe un retraso en dicho instante y, consecuentemente, la medida procesada es la medida real en el instante anterior, mientras que el valor cero refleja la ausencia de retraso y, por tanto, la medida procesada coincide con la real en dicho instante de tiempo:

$$\widetilde{y}(k) = (1-\gamma(k))y(k) + \gamma(k)y(k-1), \ k \geq 1; \quad \widetilde{y}(0) = y(0),$$

donde $y(k)$ es la medida real en el instante $k$ y $\{\gamma(k); \ k \geq 1\}$ es la sucesión de variables de Bernoulli que modeliza el retraso.

Como en el caso de observaciones inciertas, la inclusión de variables aleatorias para modelizar el retraso hace que este tipo de sistemas no sea gaussiano y que la obtención del estimador óptimo requiera un crecimiento exponencial de memoria. Así, la investigación del problema de estimación en estos sistemas se ha centrado desde su inicio en la búsqueda de estimadores subóptimos.

En el contexto del filtrado de Kalman, esto es, supuesto el conocimiento de un modelo de estados para la señal, la investigación se ha dirigido fundamentalmente a la obtención de algoritmos recursivos para dar solución, usando distintas metodologías, al problema de estimación lineal (Yaz y Ray (1998), Su y Lu (2001)). En situaciones en las que solo se dispone de información sobre las covarianzas del proceso señal y los ruidos que definen el modelo de observación, también se han establecido algoritmos recursivos para el problema de estimación lineal y, además, se ha dado solución a los problemas de estimación recursiva cuadrática y, en general, polinomial de grado arbitrario (Hermoso-Carazo y Linares-Pérez (2008), Caballero-Águila et al. (2010a)).

En esta última línea, las primeras aportaciones consideran un modelo simple en el que las hipótesis sobre el sistema son bastante restrictivas; concretamente, suponen que la señal y el ruido aditivo de la observación son independientes y las variables de Bernoulli que modelizan el retraso son también independientes. La investigación subsiguiente se ha centrado en la eliminación de la hipótesis de independencia de este modelo básico de retraso con objeto de considerar sistemas que se adapten de forma más conveniente a distintas situaciones reales.

Por ejemplo, se han considerado modelos en los que las variables que describen el retraso son correladas en instantes consecutivos y, más generalmente, en instantes distanciados por un tiempo fijo arbitrario. Estos modelos de dependencia permiten considerar situaciones en las que el número de retrasos consecutivos está acotado y, en particular, contextos en los que dos observaciones consecutivas no pueden estar retrasadas; con ello se cubren, como en el caso de observaciones inciertas, sistemas de transmisión con sensores *stand-by* programados para ser reemplazados de forma automática al detectar un retraso.

Otra cuestión de indudable interés en la investigación en sistemas con observaciones aleatoriamente retrasadas es la consideración de modelos de retraso que excedan un periodo muestral. La gran simplicidad de la formulación realizada en el caso de observaciones afectadas por retraso de un periodo muestral, permite su extensión directa para considerar retrasos que excedan dicho periodo, sin más que introducir un número conveniente de sucesiones de variables de Bernoulli para describir si las observaciones están actualizadas o están retrasadas uno, dos o, en general, un número arbitrario, aunque fijo, de periodos muestrales.

Por otra parte, y en lo que respecta al problema de estimación a partir de observaciones retrasadas procedentes de múltiples sensores con diferentes características de retraso, las primeras investigaciones tratan el problema de estimación lineal, suponiendo el modelo de estados de la señal conocido y que el retraso no excede de un periodo muestral (Hounkpevi y Yaz (2007b)). Utilizando información de covarianzas y bajo la misma suposición sobre el retraso, también se han obtenido algoritmos recursivos para el problema de estimación lineal. Recientemente, este estudio ha sido generalizado para englobar modelos de observación que en cada sensor contemplan la posibilidad de retrasos de uno o dos periodos muestrales (Linares-Pérez et al. (2009)).

Indicamos, por último, que otro fallo frecuente, cuando las observaciones de una señal se transmiten a través de cadenas de comunicación inseguras, como ocurre usualmente en aplicaciones a la radiofonía, es la pérdida definitiva de ciertas medidas. En los últimos años, fundamentalmente motivado por las aplicaciones a control de sistemas, se ha desarrollado un creciente interés por la adaptación de los algoritmos de estimación convencionales para contemplar la posibilidad de pérdidas aleatorias de medidas.

Los primeros estudios que contemplan la posibilidad de observaciones perdidas, que en ningún momento estarán disponibles para la estimación, tratan el problema en un contexto de observaciones retrasadas, admitiendo la posibilidad de un retraso infinito (Matveev y Savkin (2003), Schenato (2006)).

En 2007, Sahebsara, considerando que el modelo de estados de la señal es conocido, realizó un estudio unificado del problema de estimación en sistemas con observaciones inciertas y sistemas con observaciones afectadas por un retraso aleatorio de un periodo muestral (Sahebsara et al. (2007)). Para la unificación del estudio, el sistema con observaciones retrasadas se remodeliza definiendo un modelo de estados para la señal original aumentada con la señal en el instante previo; de esta forma, se consigue un sistema con la misma estructura que los sistemas con observaciones inciertas. Esta formulación unificada permite también tratar sistemas con múltiples pérdidas aleatorias de observaciones aumentando en este caso la señal en cada instante con la observación en el instante anterior.

Concretamente, el modelo con múltiples pérdidas aleatorias considerado por Sahebsara propone usar la última observación procesada si la real no lo está, lo que se describe, como en las situaciones de incertidumbre y retraso, mediante una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli, cuyos valores uno y cero indican, en cada instante de tiempo, si la observación está o no perdida en dicho instante. Esta modelización admite que un número infinito de observaciones consecutivas estén perdidas, lo cual puede no ser realista en diversas situaciones prácticas y ha motivado recientemente la introducción de nuevos modelos que permiten describir las observaciones perdidas en el contexto de medidas retrasadas con un tiempo máximo de retraso finito; de esta forma, se acota también el número máximo de observaciones consecutivas perdidas (Sun (2009), Caballero et al. (2010b)).

No he pretendido hacer una descripción exhaustiva de todos los posibles modelos con fallos aleatorios en las medidas que pueden surgir en situaciones prácticas ni de cómo se ha abordado el problema de estimación en cada caso. Los objetivos de esta exposición han sido presentar algunas notas históricas sobre el origen del método de mínimos cuadrados y referir la aplicación de este método en el campo de los procesos estocásticos, destacando especialmente la importancia del mismo en la obtención de algoritmos de estimación en sistemas estocásticos lineales discretos, línea en la que está centrada mi investigación en los últimos años.

# Referencias


Caballero-Águila, R., Hermoso-Carazo, A. y Linares-Pérez, J. (2003). Polynomial filtering with uncertain observations in stochastic linear systems. *International Journal of Modelling and Simulation*, 23 (1), 22-28.

Caballero-Águila, R., Hermoso-Carazo, A. y Linares-Pérez, J. (2010a). Least-squares polynomial estimation from observations featuring correlated random delays. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 12, 491-509.

Caballero-Águila, R., Hermoso-Carazo, A. y Linares-Pérez, J. (2010b). A new estimation algorithm from measurements with multiple-step random delays and packet dropouts, *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2010, Article ID 258065, 18 pages

Caballero-Águila, R., Hermoso-Carazo, A. y Linares-Pérez, J. (2011). Linear and quadratic estimation using uncertain observations from multiple sensors with correlated uncertainty. *Signal Processing*, 91, 330-337.

Carraveta, A., Germani, A. y Raimondi, M. (1996). Polynomial filtering for linear discrete time non gaussian systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34, 1666-1690.

Carravetta, F. y Mavelli, G. (2004). Polynomial filtering for systems with non-independent uncertain observations. *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, 3, 3109-3114.

Dalla Mora, M. Germani, A. y Nardecchia, A. (2001). Restoration of images corrupted by additive non-Gaussian noise. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 48, 859-875.

De Santis, A., Germani, A. y Raimondi, M. (1995). Optimal quadratic filtering of linear discrete time non gaussian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40, 1274-1278.

Hadidi, M. T. y Schwartz, S. C. (1979). Linear recursive state estimators under uncertain observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24, 944-948.

Hermoso-Carazo, A. y Linares-Pérez, J. (1994). Linear estimation for discrete-time systems in the presence of time-correlated disturbances and uncertain observations. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-39 (8), 1636-1638.

Hermoso-Carazo, A. y Linares-Pérez, J. (2008). Linear and quadratic least-squares estimation using measurements with correlated one-step random delay. *Digital Signal Processing*, 18(3), 450-464.

Hounkpevi, F. O. y Yaz, E. E. (2007a). Robust minimum variance linear state estimators for multiple sensors with different failure rates. *Automatica*, 43, 1274-1280.

Hounkpevi, F. O. y Yaz, E. E. (2007b). Minimum variance generalized state estimators for multiple sensors with different delay rates. *Signal Processing*, 87, 602-613.

Jackson, R. N. y Murthy, D. N. P. (1976). Optimal linear estimation with uncertain observations. *IEEE Transactions on Information Theory*, 22(3), 376-378.

Jaffer, A. G. y Gupta, S. C. (1971). Recursive bayesian estimation with uncertain observations. *IEEE Transactions on Information Theory*, 17, 614-616.

Jiménez-López, J. D., Linares-Pérez, J., Nakamori, S., Caballero-Águila, R. y Hermoso-Carazo, A. (2008). Signal estimation based on covariance information from observations featuring correlated uncertainty and coming from multiple sensors. *Signal Processing*, 88, 2998-3006.

Kailath, T. (1974). A View of Three Decades of Linear Filtering Theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, 20 (2), 146-181.

Kalman, R. E. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 82, 35-45.

Laakso, T. I., Tarczynski, A., Murphy, N. P. y Välimäki, V. (2000). Polynomial filtering approach to reconstruction and noise reduction of nonuniformly sampled signals. *Signal Processing*, 80, 567-575.

Linares-Pérez, J., Hermoso-Carazo, A., Caballero-Águila, R. y Jiménez-López, J. D. (2009). Least-squares linear filtering using observations coming from multiple sensors with one- or two-step random delay. *Signal Processing*, 89, 2045-2052.

Matveev, A. S. y Savkin, A. V. (2003). The problem of state estimation via asynchronous communication channels with irregular transmission times. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48, 670-676.

Nahi, N. E. (1969). Optimal Recursive Estimation with Uncertain Observation. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-15 (4), 457-462.

Nakamori, S. y Sugisaka, M. (1977). Initial-value system for linear smoothing problems by covariance information. *Automatica*, 13 (6), 623-627.

Nakamori, S. y Sugisaka, M. (1978). Design of linear filter by covariance information. *Systems and Control*, 22 (2), 111-119.

Sahebsara, M. Chen, T. y Shah, S. L. (2007). Optimal filtering with random sensor delay, multiple packet dropout and uncertain observations. *International Journal of Control*, 80(2), 292-301.

Schenato, L. (2006). Optimal estimation in network control systems subject to random delay and packet loss. *Proceedings of the 45nd IEEE Conference on Decision and Control*, 5615-5620.

Su, C. L. y Lu, C. N. (2001). Interconnected network state estimation using randomly delayed measurements. *IEEE Transactions on Power Systems*, 16, 870-878.

Sun, S. (2009). Linear minimum variance estimators for systems with bounded random measurement delays and packet dropouts. *Signal Processing*, 89, 1457-1466.

Uppala, S. V. y Sahr, J. D. (1997). On the design of quadratic filters with applications to image processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6, 608-614.

Yaz, E. y Ray, A. (1998). Linear unbiased state estimation under randomly varying bounded sensor delay. *Applied Mathematics Letters*, 11, 27-32.

# LAUDATIO DEL EXCMO. SR. D. ANDRÉS GONZÁLEZ CARMONA

Sr. Rector Magnífico de la Universidad de Granada
Excelentísimo Sr. Presidente de la Academia
Excmos. e Ilmos. Académicos y autoridades
Señoras y señores.

## 1. Agradecimiento

Ante todo, y en primer lugar, deseo expresar mi gran satisfacción y mi profundo agradecimiento a la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada por elegirme para apadrinar a D.ª Josefa Linares Pérez en este solemne acto de ingreso en la misma, como nueva Académica Numeraria. Este agradecimiento es especialmente significativo hacia mi maestro, el académico D. Ramón Gutiérrez Jáimez ya que, teniendo mayores merecimientos que yo, tuvo la deferencia, como Presidente de la Sección de Matemáticas, de permitirme ocupar el lugar que, sin duda, a él mismo le correspondía. Esta satisfacción es aún mayor porque me corresponde realizar el elogio no solo de una eminente científica, sino también de una amiga y compañera muy querida.

## 2. Currículo

La profesora Linares nació en Úbeda, provincia de Jaén, y allí realizó sus estudios de bachiller, pasando a su término a estudiar la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Granada.

Finalizada la misma se incorporó como profesora a la Universidad de Granada, al tiempo que comenzaba la preparación de su tesis doctoral, que finalizó y defendió brillantemente en solo dos años sobre Problemas de regularidad y Difusiones en ecuaciones integrales estocásticas hilbertianas, dirigida por el académico D. Ramón Gutiérrez Jáimez. Precisamente con un trabajo relacionado con el tema tratado en su tesis ganó, al poco tiempo, el Premio de Investigación de esta Academia.

Su actividad investigadora, se centra en el Cálculo Estocástico y en 1989 lidera la creación de un Grupo de investigación en este tema integrado por profesores de las universidades de Granada, Jaén y Kagoshima, al suroeste de Japón, que ha dirigido de manera ininterrumpida desde su creación. En este grupo ha desarrollado una intensa labor científica plasmada en una alta producción científica consolidada a nivel internacional con más de 70 trabajos en los últimos ocho años en revistas indexadas en Journal Citation Reports Science Edition (JCR-SE) e incluidas en diversas categorías: Automation & Control Systems; Computer Science; Engineering, Electrical & Electronic; Engineering, Multidisciplinary; Mathematics, Applied; Mathematics, Interdisciplinary Applications; Mechanics;

Operations Research & Management Science; Statistics & Probability, etc., la mayoría con impacto alto/medio.

Ha organizado un gran número de actividades dirigidas a la investigación (seminarios, cursos especializados con investigadores destacados, intercambios de investigadores, estancias, etc.)

Ha participado en cinco Proyectos de Investigación del Plan Nacional de Investigación y ha sido Investigadora Principal en cuatro de ellos. También ha sido miembro investigador en dos Proyectos de Excelencia de la Junta de Andalucía.

Es autora de más de 60 comunicaciones en congresos organizados por sociedades de reconocido prestigio a nivel internacional (EURASIP, ESCMSE, IEEE, IASTED, IFAC, SMS).

Ha dirigido seis tesis doctorales y diversos trabajos de investigación en programas de doctorado y trabajos de fin de máster. Ha sido directora de varias becas de Inicio a la Investigación del Plan Propio de la Universidad de Granada y de becas FPU.

Es editora de las revistas International Journal of Stochastic Analysis y Journal of Mathematics. Ha participado como evaluadora de Mathematical Reviews y de diversas revistas internacionales incluidas en JCR-SE (IEEE Transactions on Automatic Control, SIAM Journal Control and Optimization, IIE Transactions, Applied Mathematics and Computation,…).

Es colaboradora de ANEP (Área de Matemáticas) como evaluadora de proyectos I+D y miembro de diversas comisiones de evaluación (Estancias de jóvenes investigadores, Sabáticos, Programa I3).

En su carrera académica, ha ocupado diversos cargos, desde sus comienzos como becaria de Plan de Formación de Personal Investigador o Encargada de curso, hasta ganar la cátedra de Estadística e Investigación Operativa en el año 1998.

Ha sido Coordinadora de la Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas y lo es actualmente del Grado en Estadística de la Universidad de Granada, miembro de la Comisión Andaluza encargada de la elaboración del título de Grado en Estadística. Participó en el comité interno de evaluación de la Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas de la Universidad de Granada, dentro del Plan Andaluz de la Calidad de las Universidades, y ha sido la responsable del Contrato Programa para Acciones de Mejora de la calidad docente de la Licenciatura en Ciencias y Técnicas Estadísticas de la Universidad de Granada, incluido en los Planes de Calidad de la Universidad de Granada entre 2001 y 2007, siendo miembro del comité de seguimiento y evaluación de las Acciones de Mejora de dicha titulación.

Asimismo forma parte del Consejo Asesor de Enseñanzas de Posgrado y de la Comisión de Asuntos Económicos y Normativos de la Escuela Internacional de Posgrado de la Universidad de Granada.

## 3. Comentarios al discurso

Por lo que respecta al trabajo que ha presentado con motivo de su ingreso en la Academia, *Estimación mínimo cuadrática en modelos con fallos aleatorios*, y que Vds. acaban de oír, quiero transmitir en primer lugar mi felicitación a la Profesora Linares por su extraordinaria disertación.

Debo destacar en el mismo la conjunción de aspectos matemáticos formales, de aspectos computacionales y, especialmente, aspectos aplicados. Son muchas las personas que cuando se refieren a las Matemáticas piensan en una actividad altamente abstracta. Y siendo cierto, no lo es menos que las realmente fructíferas, están inspiradas siempre en problemas del mundo real y concreto, que tras ser resueltos, sufren un proceso de abstracción que permite aplicar los resultados obtenidos a tipos de problemas que nunca se habían previsto en la solución original.

A lo largo del discurso la Profesora Linares ha ido exponiendo este tipo de construcción de manera tan correcta que nos parece que su desarrollo y su aplicación es evidentemente así y no podía ser de otro modo, pero no es este aspecto trivial. Ha presentado sucesivamente las minizaciones de funciones de error (determinísticas) de Galileo, los fundamentales trabajos de Gauss y Legendre, y el enfoque con soporte probabilístico de Laplace, que conducen al enfoque estadístico del problema de principios del siglo XX. A partir de los años treinta otros avances en la construcción de la teoría de la Probabilidad proporcionan el fundamento para un nuevo enfoque del problema basado en los Procesos Estocásticos.

Este enfoque se complementa con la aparición de métodos de cálculo electrónico que permiten cada vez más la implementación de algoritmos eficientes que se complementa con los avances teóricos.

Pues bien, como claramente nos ha explicado, es en la conjunción de todas estas consideraciones donde la Profesora Linares ha realizado sus mayores aportaciones, considerando los casos, más realistas, en que existe incertidumbre en las medidas y esta se modeliza aleatoriamente, o que existen retrasos, también modelizados aleatoriamente, en la disponibilidad de las observaciones. En este modelo, el más complejo, es en el que la Profesora Linares ha desarrollado su mayor actividad, y el que es de mayor aplicabilidad. Los resultados obtenidos y la dificultad del fundamento matemático y su aplicación, que no se refleja en la exposición, nos permiten asegurar la calidad científica de la nueva académica y garantizar el éxito de sus futuros trabajos.

## 4. Cierre

Sé que la brillante intervención de la Profesora Linares, es el preludio de la labor que va a realizar en nuestra Academia y que contribuirá al mejor desarrollo de la misma por lo que la bienvenida que le ofrezco en nombre de la Academia redundará en el beneficio de la institución.

Muchas gracias